

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 135

Wachttijden van vliegtuigen bij landing

(Samenvatting van de twee rapporten S 99 en S 104 over
dit onderwerp)

door

Gerda Klerk-Grobbe

1954

1. Inleiding.

In de twee rapporten ¹⁾ over wachttijden van vliegtuigen bij landing (op één landingsbaan) werd een antwoord gegeven op de volgende vragen:

1) welk aantal vliegtuigen mag in een gegeven tijdsinterval volgens de dienstregeling worden toegelaten, opdat het werkelijke aantal aankomende vliegtuigen, behoudens een gegeven kleine kans, het maximaal verwerkbare aantal in dit interval niet zal overtreffen.

2) welke wachttijden (tijd tussen aanmelding bij het baken en toestemming tot landen) zullen er voor de vliegtuigen optreden, bij gegeven aantal aankomende vliegtuigen in een bepaald tijdsinterval.

Voor dit doel werden waarschijnlijkheidsverdelingen afgeleid voor het aantal aankomende vliegtuigen bij gegeven dienstregeling en voor de wachttijd bij een gegeven aantal aankomende vliegtuigen. Deze waarschijnlijkheidsverdelingen stellen ons in staat enerzijds om bij een gegeven dienstregeling de kans te berekenen, dat er meer dan een bepaald aantal vliegtuigen in een bepaald interval zullen aankomen, resp. de kans dat bij gegeven aantal aankomsten in een interval één bepaald vliegtuig langer dan een gegeven tijd moet wachten en anderzijds de dienstregeling zo vast te stellen, dat behoudens een zekere kleine kans, een bepaald aantal vliegtuigen niet zal worden overschreden.

Hoewel beide rapporten van zeer verschillende onderstellingen uitgaan, zullen ze vermoedelijk toch beide een bevredigende beschrijving van de werkelijkheid geven, en wel, kort samengevat, om de volgende redenen:

1) Uit het eerste rapport blijkt dat bij flinke wijziging van de onderstellingen, waarvan in dit rapport werd uitgegaan, toch de resultaten slechts weinig beïnvloed worden (S 99, par. 4 en 5).

2) Bij het tweede rapport werden de gemaakte onderstellingen vergeleken met gegevens van Schiphol, waarbij een goede overeenstemming werd gevonden (S 104, par. 3).

We zullen in het volgende uittreksel van beide rapporten geen afleidingen geven, maar alleen onderstellingen, resultaten

1) Rapport S 99 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam 1952, door Prof. Dr D.VAN DANTZIG en J.Th. RUNNENBURG; Rapport S 104 idem, Amsterdam 1953, door Prof. Dr J.HEMELRIJK, H.KESTEN en J.Th.RUNNENBURG.

en het gebruik van deze resultaten bespreken.

2. Eerste rapport (S 99).

Onderstellingen en notatie. De vastgestelde aankomsttijd van vliegtuig i ($i = 1, 2, \dots$), dit is het tijdstip waarop dit vliegtuig zich volgens de dienstregeling bij het baken moet melden, wordt a_i genoemd, terwijl de werkelijke aankomsttijd van dit vliegtuig door t_i wordt aangegeven. Van de a_i wordt ondersteld dat ze op gelijke afstanden van elkaar liggen en dicht opeen in vergelijking met de lengte van het tijdsinterval dat we gaan beschouwen. Het aantal vastgestelde aankomsten in een periode gedeeld door de tijdsduur van die periode, dus het aantal vastgestelde aankomsten per tijdseenheid, wordt λ_0 genoemd (in rapport S 99: λ ; wij gebruiken nu λ_0 ter onderscheiding van de λ uit rapport S 104).

De vertragingen, $t_i - a_i$, die een vliegtuig kan ondervinden, worden volgens hun grootte in twee groepen verdeeld:

- 1) "normale" vertragingen, welke niet meer dan b minuten bedragen, dus $0 \leq t_i - a_i \leq b$, en
- 2) "ernstige" vertragingen, met een tijdsduur tussen b en $b+c$ minuten, dus $b < t_i - a_i \leq b+c$.

Met "vervroegingen" en "extreme" vertragingen (meer dan $b+c$ minuten) wordt geen rekening gehouden, daar geringe vervroegingen door een verschuiving van de schaal onder de vertragingen gebracht kunnen worden, terwijl ernstige vervroegingen en extreme vertragingen slechts zelden zullen optreden.

Er wordt nu ondersteld, dat voor alle vliegtuigen de kans op een ernstige vertraging q en op een normale vertraging $1-q$ is, terwijl de vertragingen binnen hun groep homogeen verdeeld zijn. Alle mogelijke normale vertragingen bezitten dus dezelfde waarschijnlijkheid en hetzelfde geldt voor alle ernstige vertragingen, die in de beschouwing betrokken worden.

Ten slotte wordt nog de tijd, die verloopt tussen het signaal dat een vliegtuig mag landen en het moment dat de landingsbaan weer open is voor het volgende vliegtuig, de landingstijd, a , genoemd en constant verondersteld; a is van de orde van 5 minuten.

De waarden van b , c , q en a kunnen zoveel mogelijk aan de werkelijkheid worden aangepast; hierbij blijkt dat b enige malen a en c veel groter dan a is (b.v. enige uren). Voor q werden bij de voorbeelden de waarden $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{4}$ gebruikt.

Waarschijnlijkheidsverdeling van het aantal vliegtuigen in een tijdsinterval met gegeven lengte τ . In rapport S 99 bleek dat de waarschijnlijkheidsverdeling van het aantal vliegtuigen, dat in een interval van gegeven tijdsduur, τ , aankomt, heel goed met een normale verdeling ²⁾ benaderd kan worden (S 99, p. 10 e.v.). Dit aantal vliegtuigen wordt aangegeven met $\underline{K}(\tau)$ ³⁾. Verder bleek dat de gebruikte methode voor korte tijdsintervallen τ niet meer kan worden toegepast (S 99, p. 13 en 14, tabel V). Wij beperken ons daarom tot het geval $\tau \geq b+c$. Voor gemiddelde (verwachting) en spreiding van $\underline{K}(\tau)$ kan nu worden afgeleid:

$$\mathcal{E} \underline{K}(\tau) = \lambda_0 \tau$$

en

$$\sigma_{\underline{K}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{3} [b(1-q)(1+2q) + cq(3-2q)]}.$$

(De spreiding is maximaal als $q = \frac{1}{4} + \frac{c}{2(b+c)}$; dus voor een waarde van q tussen $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$.) De verwachting van het aantal vliegtuigen in tijdsinterval τ is dus gelijk aan het aantal dat volgens de dienstregeling in τ minuten moet binnenkomen.

De grootheid

$$\frac{\underline{K}(\tau) - \mathcal{E} \underline{K}(\tau)}{\sigma_{\underline{K}}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{K}'$$

is nu normaal verdeeld met gemiddelde 0 en spreiding 1, zodat we met behulp van tabellen van deze verdeling bij gegeven waarden van λ , τ , b , c en q de kans kunnen bepalen dat $\underline{K}(\tau)$ een gegeven waarde $K(\tau)$ zal overschrijden:

$$P[\underline{K}(\tau) > K(\tau)] = P[\underline{K}' > \frac{K(\tau) - \mathcal{E} \underline{K}(\tau)}{\sigma_{\underline{K}}}]$$

-
- 2) Een grootheid $\underline{x}$ ³⁾ bezit een normale verdeling, indien de kans dat $\underline{x}$ een waarde groter dan x aanneemt, $P[\underline{x} > x]$, gegeven wordt door:

$$P[\underline{x} > x] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (u-\mu)^2} du,$$

waarin μ de verwachting (gemiddelde), $\mathcal{E} \underline{x}$, van $\underline{x}$ is en σ de spreiding, $\sigma_{\underline{x}}$.

- 3) Door onderstreping van het symbool wordt aangegeven dat de grootheid een waarschijnlijkheidsverdeling bezit. Voor een door de grootheid aangenomen waarde wordt vaak hetzelfde symbool zonder onderstreping gebruikt.

Omgekeerd is bij gegeven kans α (en gegeven τ, ℓ, c en q) te bepalen het aantal vliegtuigen, dat we volgens de dienstregeling mogen toelaten, $\lambda_0 \tau$, opdat het maximaal verwerkbaar aantal vliegtuigen in tijdsinterval τ niet zal worden overschreden, behoudens de gegeven (kleine) kans α . Is de landingstijd, die voor elk vliegtuig nodig is, a , dan kunnen er in het interval τ maximaal $\frac{\tau}{a}$ vliegtuigen verwerkt worden. Er moet dus gelden:

$$P[\underline{K}(\tau) > \frac{\tau}{a}] = P[\underline{K}' > \frac{\tau - \ell \underline{K}(\tau)}{\sigma_{\underline{K}}}] = \alpha$$

In tabellen van de normale verdeling kunnen we nu opzoeken voor welke waarde van K' voldaan is aan $P[\underline{K}' > K'] = \alpha$. Noemen we deze waarde K'_α dan is dus:

$$\frac{\frac{\tau}{a} - \ell \underline{K}(\tau)}{\sigma_{\underline{K}}} = \frac{\frac{\tau}{a} - \lambda_0 \tau}{\sigma_{\underline{K}}} = K'_\alpha$$

of

$$\lambda_0 \tau = \frac{\tau}{a} - K'_\alpha \sigma_{\underline{K}}.$$

In de uitdrukking voor $\sigma_{\underline{K}}$ komt nu nog de te bepalen grootte λ_0 voor, maar daar toch geen grote nauwkeurigheid vereist is, substitueren we hiervoor de maximale waarde $\lambda_0 = \frac{1}{a}$; we gebruiken dus een iets te grote waarde van $\sigma_{\underline{K}}$ ($\sigma_{\underline{K}}$ is evenredig met $\sqrt{\lambda_0}$) zodat we met de schatting van het toelaatbare aantal vliegtuigen, $\lambda_0 \tau$, aan de voorzichtige (lage) kant blijven.

De zo gevonden waarde $\lambda_0 \tau$ stelt nu dus het aantal vliegtuigen voor dat volgens de dienstregeling kan worden toegelaten, opdat er hoogstens een kans α is dat het werkelijke aantal aankomende vliegtuigen, $\underline{K}(\tau)$, het maximaal in τ minuten verwerkbaar aantal, $\frac{\tau}{a}$, zal overschrijden, dus noodzakelijkerwijze congestie zal ontstaan. Men verlieze echter niet uit het oog, dat ook als het toelaatbare aantal in totaal niet overschreden wordt, nog opeenhoping — en dus congestie — binnen dit beschouwde tijdsinterval kan ontstaan, doordat er vliegtuigen vlak na elkaar aankomen. Een volledige oplossing van het probleem wordt dus op deze wijze niet verkregen.

Voor verschillende waarden van a, ℓ, c, q en α is de bovenbeschreven berekening uitgevoerd, de uitkomsten zijn in tabel A verzameld. Hierbij werden drie waarden van α gebruikt: 0,023; 0,0082 en 0,0026, nl. die behorende bij de volgende waarden van K'_α : 2; 2,4 en 2,8. Voor het tijdsinterval τ werd steeds 120 minuten genomen.

Opmerking. Bij $c = 180$ en $\tau = 120$ werd ook de boven gegeven formule voor σ_k gebruikt, hoewel deze strict genomen alleen voor het geval $\tau \geq c$ geldt. Deze gevallen werden toegevoegd als voorbeeld van de geringe wijziging van de resultaten indien de onderstellingen (hier c) sterk gewijzigd worden.

Tabel A
Voorbeelden uit rapport S 99.

gegevens (alle tijden in minuten)	a =	5	3	5	3	5	3	(landingsduur)
	b =	20	10	20	10	20	10	(norm. vertr.)
	c =	100	100	100	100	180	180	(ernst. vertr.)
	q =	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	(kans op ernst. vertr.)
	$\lambda \frac{1}{a} =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	
$\sigma =$		1,82	2,08	2,38	2,86	2,82	3,50	
Toelaat- baar aan- tal vlieg- tuigen in =2 uur, behoudens een kans	$\alpha=0,023$	20	35	19	34	18	33	
	$\alpha=0,0082$	19	35	18	33	17	31	
	$\alpha=0,0026$	18	34	17	31	16	30	

3. Tweede rapport (S 104).

Onderstellingen en notatie. We nemen aan dat in het tijdsinter-
val τ N vliegtuigen binnenkomen. In rapport S 104 wordt veron-
dersteld, dat de optredende vertragingen zo groot zijn in verge-
lijking met de volgens de dienstregeling tussen op elkaar volgen-
de vliegtuigaankomsten gelegen tijdsintervallen dat de aankomst-
tijden homogeen over τ verdeeld zijn en wel voor de verschillen-
de vliegtuigen onderling onafhankelijk. Uit deze onderstelling
volgt dan, dat de tijdsintervallen tussen de aanmeldingen bij
het baken van twee opeenvolgende vliegtuigen onderling onafhan-
kelijk verdeeld zijn volgens dezelfde waarschijnlijkheidsverde-
ling, die bij benadering voorgesteld kan worden door:

$$P[\tau \leq z] = 1 - e^{-\frac{\lambda z}{a}},$$

d.w.z. de kans, dat het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende
aanmeldingen $\leq z$ is, wordt gegeven door deze uitdrukking. Hierin
is a de landingstijd, evenals in rapport S 99, en λ de "verkeers-
intensiteit", d.w.z. de totale tijd die nodig is voor het landen
van de N vliegtuigen, gedeeld door de beschikbare tijd: $\lambda = \frac{Na}{\tau}$

(λ moet dus niet verward worden met de in de vorige paragraaf ingevoerde λ_0). Is $\lambda > 1$, dan ontstaat er zeker een verkeersopstopping, daar dan de totaal benodigde landingstijd, N/a , groter dan de duur van het interval, τ , is.

De hier gemaakt onderstelling stelt ons in staat desgewenst ook kleinere waarden van τ te beschouwen dan in rapport S 99 en bovendien kan men nu de waarschijnlijkheidsverdeling der wachttijden van de vliegtuigen berekenen.

Waarschijnlijkheidsverdeling van de wachttijd. De wachttijd, $\underline{w}$, is de tijd die het vliegtuig na zijn aanmelding bij het baken nog in de lucht moet blijven eer het toestemming krijgt om te landen. Op grond van bovengenoemde onderstellingen kon de waarschijnlijkheidsverdeling van de wachttijd voor een vliegtuig (voor $\lambda < 1$) worden afgeleid (A.K.ERLANG (1907), zie rapport S 104), zodat de kans, dat $\underline{w}$ kleiner dan een zekere waarde w zal zijn, bepaald kan worden:

$$P[\underline{w} \leq w] = F(w).$$

De functie $F(w)$ werd getabelleerd als functie van λ en $\frac{\lambda w}{a}$ (tabel I, nog eens hierachter afgedrukt). Om $F(w)$ te bepalen moeten dus a en $\lambda = \frac{Na}{\tau}$ bekend zijn.

Met deze tabel is bij een gegeven kleine kans α en ^{gegeven λ en α} de waarde w_α te vinden, waarvoor geldt dat er hoogstens een kans α is dat de wachttijd groter dan w_α zal zijn:

$$P[\underline{w} > w_\alpha] = 1 - F(w_\alpha) = \alpha$$

Tabel I is ook nog in andere zin te gebruiken, nl. als volgt: we willen door een geschikte keuze van N (dus van λ) zorgen dat de kans op wachttijden groter dan een bepaalde waarde w_0 hoogstens een gegeven kleine waarde α heeft (a en τ bekend). Er moet dus gelden

$$P[\underline{w} < w_0] = F(w_0) = 1 - \alpha.$$

In tabel I kunnen we dan die waarde van λ opzoeken, waarvoor bij $\lambda \frac{w_0}{a}$ voor $F(w)$ minstens de waarde $1 - \alpha$ gevonden wordt.

Voorbeeld: $a = 3$, $w_0 = 9$, $1 - \alpha \geq 0,95$. In de tabel zien we dat:

bij $\lambda = 0,5$ dus $\frac{\lambda w_0}{a} = 3 \lambda = 1,5$ hoort $F(w_0) = 0,985$,

bij $\lambda = 0,6$ dus $\frac{\lambda w_0}{a} = 3 \lambda = 1,8$ hoort $F(w_0) = 0,957$ en

bij $\lambda = 0,7$ dus $\frac{\lambda w_0}{a} = 3 \lambda = 2,1$ hoort $F(w_0) = 0,895$.

De beste waarde voor λ is dus $0,6$. Is $\tau = 120$ minuten, dan

is $N = \frac{\tau \lambda}{a} = 24$. Dit betekent dus dat, wanneer er 24 vliegtuigen in 2 uur aankomen en de landingstijd $a = 3$ minuten per vliegtuig bedraagt, de wachttijd voor de vliegtuigen, behoudens een kans $\alpha = 0,043$, niet groter dan 9 minuten zal zijn.

Ten einde bepalingen als deze te vereenvoudigen werd voor drie constante waarden van $F(w)$ (dus van $1-\alpha$), nl. 0,90; 0,95 en 0,98 de waarde van λ uitgezet als functie van $\frac{w}{a}$ (grafiek IV, deze is overgenomen uit rapport S 104). Voor het bovenstaande voorbeeld lezen we bij $\frac{w}{a} = 3$ op de kromme $F(w) = 0,95$ direct af: $\lambda = 0,615$, dus: $N = \frac{\tau}{a} \lambda \simeq 24$.

Om een indruk van de waarschijnlijkheidsverdeling van de wachttijden te verkrijgen, kunnen het gemiddelde en de spreiding berekend worden met de volgende formules:

$$\bar{E}_w = \frac{\lambda}{2(1-\alpha)} \cdot a \quad \text{en} \quad \sigma_w = \bar{E}_w \cdot \sqrt{\frac{4}{3\lambda} - \frac{1}{3}}.$$

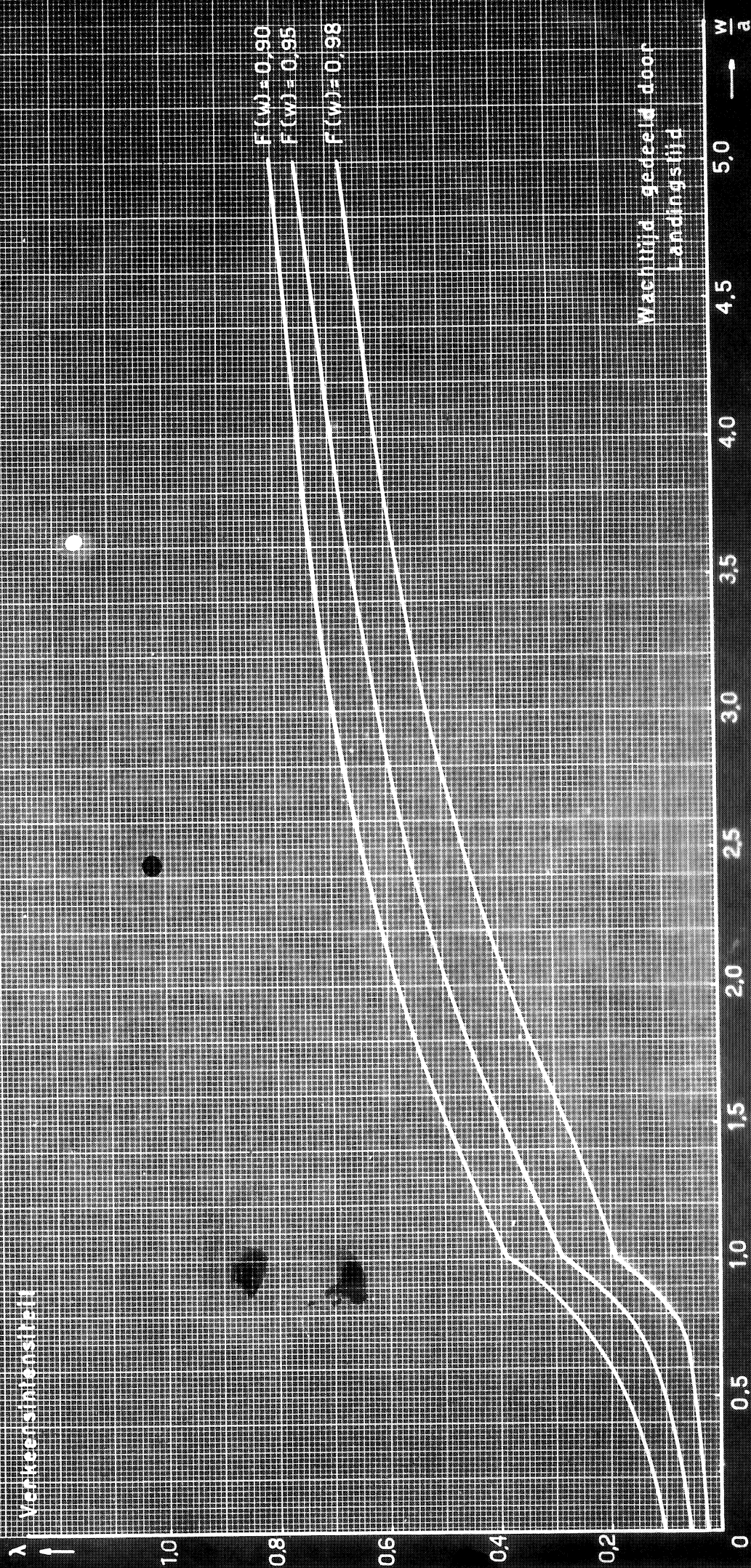
(D.V.LINDLEY (1952), zie rapport S 104). Ter vermijding van rekenwerk werd ook hiervoor een grafiek vervaardigd: grafiek V, (overgenomen uit rapport S 104), waarin $\frac{\bar{E}_w}{a}$ en $\frac{\sigma_w}{a}$ uitgezet zijn als functies van λ .

Tabel I.

 $10^3 \times$ verdelingsfunctie $F(w)$ van de wachttijd w als functie van λ en $\frac{\lambda w}{a}$.

$\lambda \backslash \frac{\lambda w}{a}$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	000
0.1	1000	995	884	774	663	553	442	332	221	111	000
0.2	1000	1000	977	855	733	611	489	366	244	122	000
0.3	1000	1000	991	945	810	675	540	405	270	135	000
0.4	1000	1000	998	967	895	746	597	448	298	149	000
0.5	1000	1000	999	983	923	824	659	495	330	165	000
0.6	1000	1000	1000	992	947	856	729	547	364	182	000
0.7	1000	1000	1000	996	965	885	761	605	403	201	000
0.8	1000	1000	1000	998	977	910	792	635	445	223	000
0.9	1000	1000	1000	999	984	931	822	665	470	246	000
1.0	1000	1000	1000	999	990	947	849	694	495	261	000
1.1	1000	1000	1000	1000	993	958	872	722	520	276	000
1.2	1000	1000	1000	1000	995	967	891	749	545	292	000
1.3	1000	1000	1000	1000	997	975	906	773	569	307	000
1.4	1000	1000	1000	1000	998	980	920	794	592	323	000
1.5	1000	1000	1000	1000	999	985	932	812	614	339	000
1.6	1000	1000	1000	1000	999	988	942	829	635	354	000
1.7	1000	1000	1000	1000	1000	991	950	845	653	369	000
1.8	1000	1000	1000	1000	1000	993	957	859	671	384	000
1.9	1000	1000	1000	1000	1000	994	964	872	688	397	000
2.0	1000	1000	1000	1000	1000	996	969	884	705	411	000
2.1	1000	1000	1000	1000	1000	997	973	895	720	424	000
2.2	1000	1000	1000	1000	1000	997	977	904	735	437	000
2.3	1000	1000	1000	1000	1000	998	981	913	749	450	000
2.4	1000	1000	1000	1000	1000	998	983	921	762	463	000
2.5	1000	1000	1000	1000	1000	999	986	928	775	475	000
2.6	1000	1000	1000	1000	1000	999	988	935	786	487	000
2.7	1000	1000	1000	1000	1000	999	990	941	798	499	000
2.8	1000	1000	1000	1000	1000	999	991	946	808	510	000
2.9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	992	951	818	521	000
3.0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	994	956	828	532	000
3.1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	995	960	837	543	000
3.2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	995	964	845	553	000
3.3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	996	967	853	563	000
3.4	1000	1000	1000	1000	1000	1000	997	970	861	573	000
3.5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	997	973	868	583	000
3.6	1000	1000	1000	1000	1000	1000	998	975	875	592	000
3.7	1000	1000	1000	1000	1000	1000	998	978	882	602	000
3.8	1000	1000	1000	1000	1000	1000	998	980	888	611	000
3.9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	998	981	894	620	000
4.0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	999	983	900	628	000

Uit A.K.Erlang [1948], blz. 135 en voortgezet vanaf $\frac{\lambda w}{a} = 2,0$ door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

[illegible]

5

GRAFIEK V

Gemiddelde en spreiding
van de wachttijd als functie
van de verkeersintensiteit

 $E(W)$

a

 $\sigma(W)$

b

 $E(W)$

a

 $\sigma(W)$

b

0

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

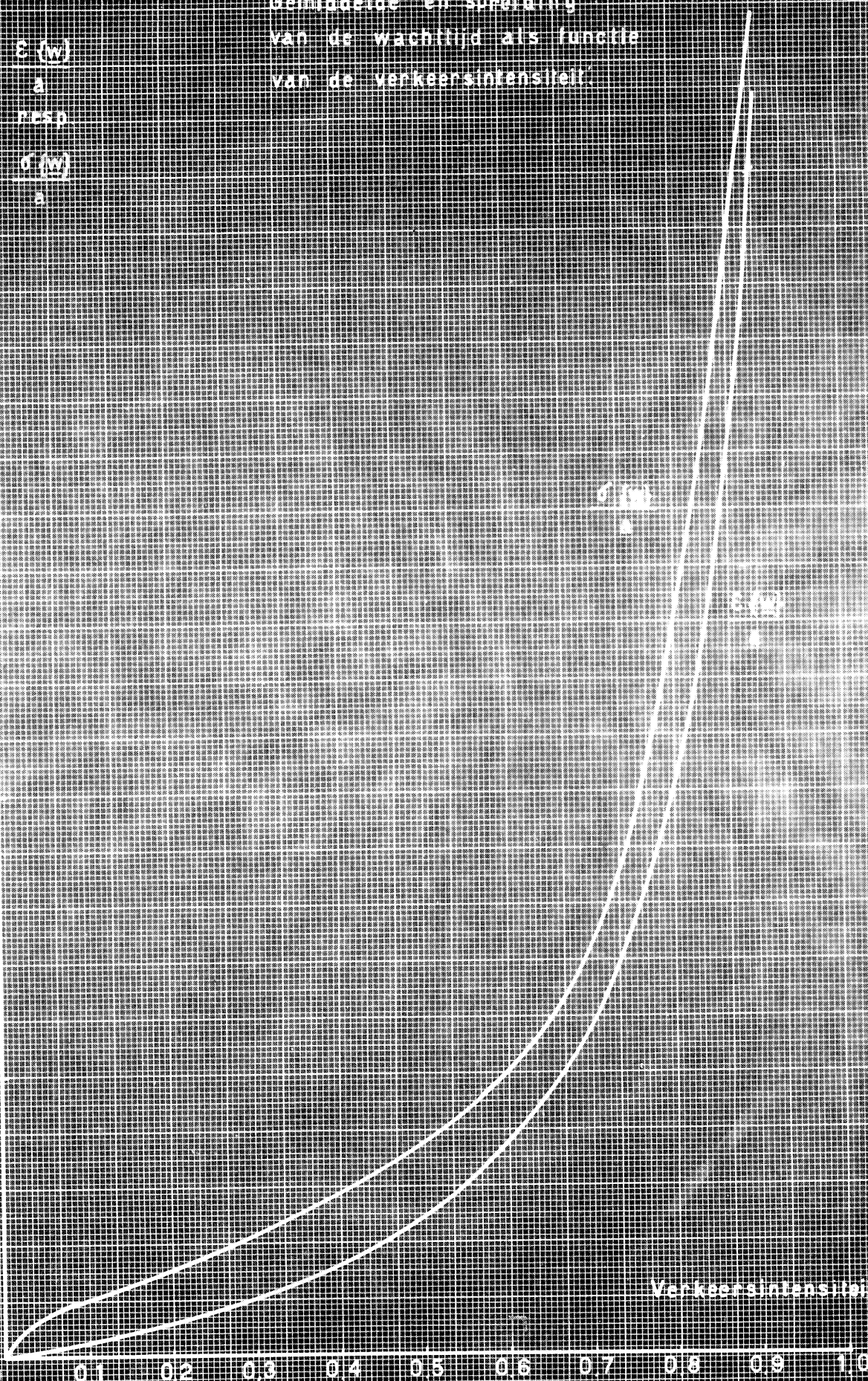
0.6

0.7

0.8

0.9

1.0

Verkeersintensiteit λ 

Errata bij de rapporten S 99 en S 104.

- 1) Op pagina 2 van rapport S 99 is bij de definitie van a_i een fout ingeslopen. Juist is: a_i is de aankomsttijd bij het baken volgens de dienstregeling; de vastgestelde aankomsttijd op de grond is dan dus $a_i + a$.
- 2) Bij de voorbeelden in paragraaf 5 van de bepaling van het toegelaten aantal vliegtuigen per twee uur is in de gevallen waarin $b+c \neq 120$ minstens was een factor $\frac{120}{110}$ gebruikt bij de berekening; deze kan overal worden geschrapt (pagina's 12, 17 en 18). De uitkomsten worden hierdoor slechts weinig beïnvloed.
- 3) Bij de laatste twee voorbeelden is formule (8α) in plaats van formule (8γ) voor de spreiding gebruikt. De juiste uitkomsten van deze en de in punt 2) bedoelde voorbeelden zijn te vinden in tabel A van rapport S 135.
- 4) In de conclusie op pagina 18 wordt gezegd, dat volgens de onderstellingen niet meer dan 25% van de vliegtuigen een vertraging heeft tussen 30 minuten en 3 uur en de overige vliegtuigen een tussen 0 en 30 minuten gelegen vertraging. Dit moet zijn: niet meer dan 25% heeft een vertraging tussen 20 minuten (resp. 10 min.) en 200 minuten (resp. 190 min.); de overige vliegtuigen een vertraging tussen 0 en 20 minuten (resp. 10 min.). Deze zelfde wijziging moet aangebracht worden op pagina 1 van rapport S 104.